

التمرين الرابع

(1) لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق في النقطة a .

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} \quad \text{أحسب النهاية}$$

(2) لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق في النقطة $a = 2$

و بحيث $f(2) = 0$ و $f'(2) = 3$. أحسب النهايتين

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f\left(2 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)}{x - 2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(\sqrt{x+2})}{x - 2}$$

التمرين الخامس

نضع $I = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ وليكن x و y من I بحيث $x < y$

$$(1) \quad \text{بين أن} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) \leq \sin y - \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(y - x)$$

$$(2) \quad \text{استنتج أن} \quad \frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$$

التمرين السادس

لتكن f دالة عددية متصلة على $[0, 1]$ و قابلة للاشتقاق على

$$]0, 1[\quad \text{بحيث:} \quad f(0) = f(1) = f'_d(0) = 0$$

$$\text{بين أن} \quad (\exists c \in]0, 1[) \quad f'(c) = \frac{f(c)}{c}$$

التمرين السابع

(1) لتكن f قابلة للاشتقاق مرتين على مجال $[a, b]$

بين أنه يوجد عدد من المجال $]a, b[$ بحيث:

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2} f''(c)$$

(2) لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على المجال $[a, b]$

بين أنه لكل c من $]a, b[$ يوجد عدد d من $]a, b[$ بحيث:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{c - b}{a} f''(d)$$

التمرين الأول

ادرس قابلية اشتقاق f في النقطة a في الحالات التالية

$$a = 0 \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$a = 0 \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = \sin^2 x E\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$a = 1 \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} & ; \quad x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$a = 0 \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = |x^2 - x| & ; \quad x < 0 \\ f(0) = x\sqrt{x} & ; \quad x \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

التمرين الثاني

لتكن f دالة عددية معرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ f(x) = ax^2 + bx + 1 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

(1) حدد العلاقة بين a و b كي تكون f متصلة على \mathbb{R}^+

(2) حدد العددين a و b كي تكون الدالة f قابلة

للاشتقاق على \mathbb{R}^{+*}

التمرين الثالث

حدد مشتقة الدالة f في كل من الحالات التالية:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \quad (2) \quad f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = (1 + \sin(2x))^3 \quad (3)$$

$$f(x) = \tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad (5) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x+2}} \quad (4)$$

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{3x}} \quad (7) \quad f(x) = \tan(\sin x) \quad (6)$$

$$f(x) = \sin\left(\arctan(\pi\sqrt{x})\right) \quad (8)$$