التمرين الأول

التمرين الأول

حدد مجموعة النقط $M(z)$ في الحالات التالية :

1) $A(1+i)$, $B(z+i)$, $C(1+iz)$ مستقيمية

2) النقط $M(z)$, $N(z^2)$, $P(z^3)$ رؤوس مثلث قائم الزاوية في N

3) النقط $M(z)$, $N(i)$, $P(iz)$ تكون مثلثا قائم الزاوية في N

التمرين الثاني

التمرين الثاني

حدد مجموعة النقط $M(z)$ في كل من الحالات التالية :

1) $|z+i| = |\bar{z}-1|$ 2) $\dfrac{z+1+i}{z-i} \in \mathbb{R}$ 3) $\dfrac{iz-1}{z+2i} \in i\mathbb{R}$ 4) $z\bar{z} + z + \bar{z} = 3$

التمرين الثالث

التمرين الثالث

حدد الشكل المثلثي العدد z في الحالات التالية :

1) $z = \dfrac{3\sqrt{3}+i\sqrt{6}}{\sqrt{3}+i\sqrt{3}}$ 2) $z = (1+i)\left[\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(\sqrt{3}-1\right)\right]$

3) $z = 1-\cos\theta + i\sin\theta$ و $\theta \in]0,2\pi[$ 4) $z = \cos 2\theta + i\cos^2\theta$ و $\theta \in]0,\pi[$

5) $z = \sin\theta + i(1+\cos\theta)$ و $\theta \in]\pi,2\pi[$ 6) $z = \dfrac{1}{1+i\tan\theta}$ و $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

7) $z = \dfrac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\sin\alpha - i\cos\alpha}$ و $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ 8) $z = 1+i\tan\alpha$ و $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

التمرين الرابع

التمرين الرابع

بين ما يلي :

1) $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$

2) $\left(|z+z'| = |z| + |z'| \right) \Leftrightarrow \left(\arg(z) \equiv \arg(z') \ [2\pi] \right)$

3) ليكن a , b , c أعداد عقدية معيارها 1 بين أن $|ab+bc+ca| = |a+b+c|$

4) $\left(\forall (a,b) \in \mathbb{C}^{*2}\right) \quad \left|\dfrac{a}{|a|^2} - \dfrac{b}{|b|^2}\right| = \left|\dfrac{a-b}{ab}\right|$

5) $\left(|z+z'| = |z| + |z'| \right) \Leftrightarrow \left(\arg(z) \equiv \arg(z') \ [2\pi] \right)$

التمرين الخامس

التمرين الخامس

لكل عدد عقدي z يخالف i نضع $Z = \dfrac{iz}{z-i}$

1) أحسب Z من أجل $z = 2+3i$

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $Z = 1+2i$

3) أ- بين أن : $\left(\bar{Z} = Z\right) \Leftrightarrow \left(\left(z - \dfrac{1}{2}i\right)\left(\bar{z} + \dfrac{1}{2}i\right) - \dfrac{1}{4} = 0 \right) \quad \left(\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}\right)$

ب- استنتج مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى (P) و التي يكون من أجلها Z حقيقي

4) حدد المجموعة (D) للنقط $M(z)$ من المستوى (P) و التي يكون من أجلها $|Z|=1$

التمرين السادس

www.manti.ift.fr

ليكن z عددا عقديا بحيث $z \neq i$ و نضع $Z = \dfrac{i+z}{i\bar{z}+1}$

1) أحسب Z من أجل $z = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z=2$

3) أ- أكتب $\overline{Z}$ بدلالة z و $\bar{z}$

ب- بين أن $\left(z+\bar{z}\right)\left(i(z-\bar{z})-2\right)=0 \Leftrightarrow \overline{Z}=-Z \quad : \quad \left(\forall z \in \mathbb{C}-\{-i\}\right)$

ج- استنتج (E) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها Z عددا تخيليا

4) حدد (D) مجموعة النقط $M(z)$ و التي يكون من أجلها $|Z|=1$

5) أ- بين أن $z^2+\bar{z}^2+2i\left(z-\bar{z}\right)-2=0 \Leftrightarrow \overline{Z}=Z \quad : \quad \left(\forall z \in \mathbb{C}-\{-i\}\right)$

ب- استنتج (C) مجموعة النقط M ذات اللحق z و التي يكون من أجلها Z عددا حقيقي

التمرين السابع

نعتبر في المستوى العقدي (P) النقط A , B , C التي ألحاقها على التوالي $a=\sqrt{3}+i$, $b=-2i$ و $c=-2\sqrt{3}$

1) حدد الشكل المثلثي للعددين b , a

2) أ- بين أن : $\dfrac{b-a}{b-c}=-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC

3) حدد d لحق النقطة D كي يكون $ABCD$ مربع

التمرين الثامن

نعتبر النقطتين A ; B ذات اللحق $z_A=\sqrt{3}+i$ و $z_B=-1+i\sqrt{3}$ على التوالي

1) حدد الشكل المثلثي للعددين z_A , z_B

2) أحسب $\dfrac{z_B}{z_A}$ و استنتج طبيعة المثلث OAB و حدد قياسا للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$

3) نعتبر العدد $z_C=z_A+z_B$ و النقطة $C(z_C)$

أ- ما هي طبيعة الرباعي $OACB$

ب- حدد قياسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ و استنتج أن $\arg(z_C)\equiv\dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

ج- استنتج قيمة كل من $\sin\dfrac{5\pi}{12}$; $\cos\dfrac{5\pi}{12}$

التمرين التاسع

www.manti.ift.fr

نعتبر العدد العقدي $Z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ و نضع $\theta\equiv\arg(Z)\ [2\pi]$

1) بين أن $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ (دون حساب θ)

2) أ- بين أن $Z^2 = 2\sqrt{2}(1+i)$

ب- حدد الشكل المثلثي للعدد $u = 1+i$ و استنتج أن $\theta = \frac{\pi}{8}$

ج- أحسب $\sin\frac{\pi}{8}$; $\cos\frac{\pi}{8}$

www.manti.ift.fr	**التمرين العاشر**

نعتبر العددين $z_1 = \left(\sqrt{3}+2\right) + i$ و $z_2 = 1 + \left(\sqrt{3}-2\right) i$ و نضع $\theta \equiv \arg(z_1)\ [2\pi]$

و لتكن A , B نقطتان لحقاهما z_1 ; z_2 على التوالي

1) أ- بين أن $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (دون حساب θ)

ب- بين أن $z_1 z_2 = 4$ و استنتج أن $\arg(z_2) \equiv -\theta\ \ [2\pi]$

2) أ- بين أن $\frac{z_1}{z_2} = \left(2+\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)$

ب- استنتج طبيعة المثلث OAB و حدد قياس الزاوية $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$

ج- استنتج أن $\theta = \frac{\pi}{12}$

3) بين أن $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

التمرين الحادي عشر

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ ما يلي :

$Z^2 + (1+i)Z + i = 0$	$Z^2 + 2(1-i)Z - 1 = 0$	$iZ^2 + \left(1+i\right)Z + 1 = 0$
$Z^2 - 2(\cos\alpha)Z + 1 = 0$	$Z^2 - \left(\sqrt{3}+9i\right)Z - 8\left(1-i\sqrt{3}\right) = 0$	$2iZ^2 + 2(1-i)Z + 3 = 0$
$(E)\ \ Z^2 - m(1+i)Z + im^2 = 0$	$Z^2 - 2Z + 1 + a^2 = 0$ حيث $a \in \mathbb{C}$	$\left(Z^2+3Z-2\right)^2 + \left(2Z^2-3Z+2\right)^2 = 0$

2) حدد الجذرين المربعين للعدد $-2-2i\sqrt{3}$ ثم حل المعادلة $Z^2 - \left(3+i\sqrt{3}\right)Z + 2\left(1+i\sqrt{3}\right) = 0$

3) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\ \ Z^3 + 3(3-i)Z^2 + (24-9i)Z - 26i = 0$

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا z_0 يتم تحديده ثم حل المعادلة (E)

4) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\ \ 2iZ^3 + 2(2-i)Z^2 - (3+2i)Z + i = 0$

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا z_0 يتم تحديده ثم حل المعادلة (E)

5) أ- بين أن المعادلة $2Z^3 + (-7+i)Z^2 + (10-4i)Z - 8 + 4i = 0$ (E) علما أنها تقبل حلا حقيقيا a

ب- حدد الحلين الآخرين z_1 , z_2 للمعادلة (E) (نأخذ $\operatorname{Im}(z_2) < 0$)

ج- حدد الشكل الجبري للعدد z_1^{2003}

د- نعتبر النقط $A(a)$, $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ ما هي طبيعة المثلث AM_1M_2