

## استدراكية 2008

نزود  $\mathbb{R}$  بقانون تركيب داخلي \* المعرفة بما يلي :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad x * y = x + y - 3xy$$

$$(1) \quad \text{أ. تحقق أن } (1-3x)(1-3y) = 1-3(x * y)$$

ب. بين أن  $\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}, *\right)$  زمرة تبادلية

$$(2) \quad \text{أ. نعتبر التطبيق } \varphi : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$x \rightarrow \varphi(x) = 1 - 3x$$

بين أن  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}, *\right)$  نحو  $(\mathbb{R}^*, \times)$

$$\text{ب. بين أن } \varphi^{-1}(\mathbb{R}^+) = \left] -\infty, \frac{1}{3} \right[$$

ج. بين أن  $\left(\left] -\infty, \frac{1}{3} \right[, *\right)$  زمرة جزئية من  $\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}, *\right)$

(3) ليكن  $x$  من  $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$  و  $n$  عدد طبيعي من  $\mathbb{N}$ .

$$\text{نضع : } x^{(0)} = 0 \quad \text{و} \quad x^{(n+1)} = x^{(n)} * x \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

أ. بين أن :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}\right) (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$$

ب. استنتج  $x^{(n)}$  بدلالة  $x$  و  $n$

(4) نزود المجموعة  $\mathbb{R}$  بقانون تركيب داخلي T المعرفة

$$\text{بما يلي : } (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad x T y = x + y - \frac{1}{3}$$

أ. بين أن  $(\mathbb{R}, T)$  زمرة تبادلية

ب. بين أن  $(\mathbb{R}, *, T)$  جسم غير تبادلي

## 2009 العادية

$(\mathbb{R}) M_2$  مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2. نذكر

$$\text{أن } (M_2(\mathbb{R}), +, \times) \text{ حلقة واحدة وحدتها } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. ونعتبر المجموعة  $F$  للمصفوفات والتي تكتب على

$$\text{الشكل } M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \text{ مع } (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

(1) أ. بين أن  $F$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

ب. بين أن  $(F, \times)$  زمرة غير تبادلية

(2) لتكن  $G$  مجموعة المصفوفات  $M(x, 0)$  من  $F$  حيث

أن  $x \in \mathbb{R}^*$ . بين أن  $G$  زمرة جزئية للزمرة  $(F, \times)$

(3) نضع  $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

نزود  $E$  بقانون تركيب داخلي  $\perp$  المعرفة بما يلي :

$$(\forall ((x, y), (a, b)) \in E^2) \quad (x, y) \perp (a, b) = \left( xa, xb + \frac{y}{a} \right)$$

$\varphi : (F, \times) \rightarrow (E, \perp)$

ونعتبر التطبيق :

$$M(x, y) \rightarrow (x, y)$$

أ. أحسب  $(1, 1) \perp (2, 3)$  و  $(1, 1) \perp (2, 3)$

ب. بين أن التطبيق  $\varphi$  تشاكل تقابلي

ج. استنتج بنية  $(E, \perp)$

## استدراكية 2009

$(\mathbb{R}) M_2$  مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

نذكر أن  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي

و  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة واحدة

ولتكن  $V$  مجموعة المصفوفات والتي تكتب على

$$(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \text{حيث } M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$$

(1) بين أن  $(V, +, \cdot)$  فضاء حقيقي محدد بعده

(2) أ. بين أن  $V$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

ب. بنية  $(V, +, \times)$  حلقة واحدة تبادلية

$$(3) \quad \text{أ. أحسب } M\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}\right) \times M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

ب. هل  $(V, +, \times)$  جسم؟

(4) لتكن  $X$  مصفوفة من  $V$  حيث :

$$(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \text{مع } X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$$

أ. بين أن  $X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I = O$  حيث  $O$  هي

المصفوفة المنعدمة

ب. نفترض أن  $a^2 - 4b^2 \neq 0$  بين أن المصفوفة  $X$  تقبل

مقلوبا في  $V$  ينبغي تحديده

## تمارين

لتكن  $(G, *)$  زمرة عنصرها المحايد  $e$  ونرمز بـ  $a^{-1}$

لمائل  $a$  في  $(G, *)$  وليكن  $f_a$  التطبيق المعرفة من  $G$

نحو  $G$  بما يلي :  $(\forall x \in G) \quad f_a(x) = a * x * a^{-1}$

(1) بين أن  $f_a$  تشاكل من  $(G, *)$  نحو  $(G, *)$

(2) لتكن  $F$  مجموعة التطبيقات  $f_a$  ;  $a \in G$ .

بين أن  $(F, \circ)$  زمرة